1.

Добрый день, уважаемый председатель и члены государственной экзаменационной комиссии. Сегодня Вашему вниманию предлагается доклад Мукасеевой Дарьи Александровны на тему выпускной квалификационной работы «Изучение единственности слабых решений уравнений Навье-Стокса».

2.

Уравнения Навье-Стокса - это система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движение вязкой ньютоновской жидкости. Они используются в математическом моделировании, многих прикладных задачах физики и математической гидродинамики. Вопрос существования и единственности решений - одна из семи так называемых задач тысячелетия. Поэтому, данная задача актуальна начиная с 1822 г. по настоящее время.

3.

На данном слайде поясню, что такое сильное решение для системы уравнений Навье-Стокса.

Определение1. Сильным решением начально-краевой задачи (1)-(4) называется пара функций и , удовлетворяющих следующим условиям:

1. обобщенные частные производные функций, содержащихся в равенствах (1)-(2), принадлежат пространству ;

2. при подстановке функций уравнения (1)-(2) обращаются в равенства в пространстве ;

3. функция удовлетворяет начальному условию (3) и граничному условию (4).

Данная задача является задачай тысячелетия.

4.

В данной бакалаврской работе изучались важные для системы Навье-Стокса научные результаты, также как и понятия слабого решения системы Навье-Стокса и единственности слабых решений.

Определение 1  
Пусть и . Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция , удовлетворяющая для всех и для почти всех значений равенству

(6)

с условием

(7)

5.

Таким образом, встает вопрос о корректности поставленной задачи.  
Проведено доказательство линейности и непрерывности оператора

1. Оператор линейный инепрерывный, причем

(8)

2. Оператор непрерывен и справедлива оценка

(9)

для некоторой константы .

6.

Исходя из этого, функция v непрерывна на [О,T] и благодаря преставленной лемме условие v(O)=v\_o.   
Лемма. Пусть и — банаховы пространства, такие, что — рефлективно и вложение непрерывно. Если функция слабо непрерывна как функция со значениями в ,то и слабо непрерывна и как функция со значениями в .

если функция , то эта функция слабо непрерывна со значениями в . Поэтому начальное условие (7) имеет смысл.

7.

Таким образом, мы подошли ко второму понятию слабого решения:

Определение 2. Пусть и . Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция и условию, удовлетворяющая при почти всех значений равенству

(10)

и начальному условию

(11)

Исходя из данного определения, имеет место теорема

Теорема 1. Для системы уравнений Навье-Стокса (1)-(4) Ж. Лере в 1934 г. был получен следующий результат: Пусть . Для каждой функции и начально-краевая задача (1)-(4) имеет хотя бы одно слабое решение

8.

Во второй главе рассматривалось доказательство единственности слабого решения.

Сформулируем и докажем утверждение о единственности слабого решения в случае .

Теорема 2.1 Пусть ограниченная область в с достаточно гладкой границей . Тогда слабое решение решение задачи (1)-(4) единственно.

Рассматривается два решения v и u системы Навье-Стокса и изучается их разность. Получается задача относительно w = v – u. Для данной задачи получаем оценку. На основе леммы Гронуола-Белмана получаем , что w(t) = 0 для всеъ t [0, T] следовательно решение системы Навье-Стокса единственно.